模块一 直线与方程

第 1 节 直线的方程（★☆）

强化训练

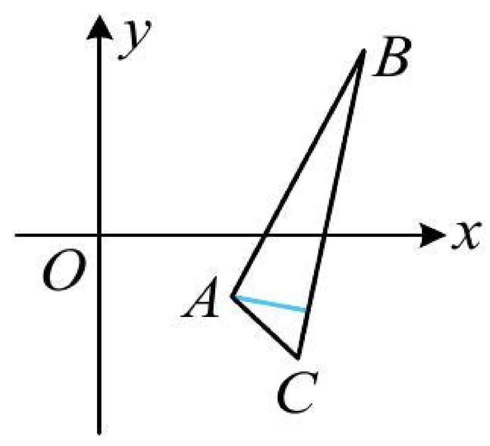
1.（★）已知ΔABC中，$A(2,-1)$，$B(4,3)$，$C(3,-2)$，则BC边上的高所在直线的方程为_____.

答案： $x+5y+3=0$

解析： 如图，BC 边上的高过点 A，求方程还差斜率，可由高与 BC 垂直求斜率，

由题意，$k_{BC}=\dfrac{-2-3}{3-4}=5$，所以 BC 边上的高所在直线的斜率为$-\dfrac{1}{5}$，

又该直线过点$A(2,-1)$，所以其方程为$y-(-1)=-\dfrac{1}{5}(x-2)$，整理得：$x+5y+3=0$.



2.（★）过点$(5,2)$，且在 x 轴上截距是在 y 轴上截距 2 倍的直线 l 的方程是（　　）

（A）$2x+y-12=0$　　（B）$2x+y-12=0$或$2x-5y=0$

（C）$x-2y-1=0$　　（D）$x+2y-9=0$或$2x-5y=0$

答案： D

解析： 涉及截距，可设直线的截距式方程，先考虑截距为 0 的特殊情况，

当直线 l 过原点时，其方程为$y=\dfrac{2}{5}x$，即$2x-5y=0$，

此时 l 在两个坐标轴截距都为 0，满足题意；

当直线 l 不过原点时，可设$l:\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{a}=1(a\neq 0)$ ①，

将$(5,2)$代入得：$\dfrac{5}{2a}+\dfrac{2}{a}=1$，解得：$a=\dfrac{9}{2}$，

代入①整理得 l 的方程为$x+2y-9=0$；

综上所述，l 的方程为$x+2y-9=0$或$2x-5y=0$.

3.（★）已知直线$l_1:x+m^2y+6=0$和直线$l_2:(m-2)x+3my+2m=0$平行，则实数$m=$_____.

解析： 已知两直线平行，可用$A_1B_2=A_2B_1$来求参数，

因为$l_1 \parallel l_2$，所以$3m=(m-2)m^2$，解得：$m=0$或 3 或-1，

注意还需代回原方程检验，看看两直线是否重合，

当$m=3$时，l_1和l_2的方程均为$x+9y+6=0$，它们重合；

当$m=0$时，$l_1:x+6=0$，$l_2:x=0$，它们平行；

当 $m=-1$ 时，$l_1: x+y+6=0$，$l_2: x+y+\dfrac{2}{3}=0$，它们平行；

所以 m 的值为 0 或 -1.

4.（2022・江苏泰州模拟・★★）已知直线 $l_1: x+(a-1)y+2=0$，$l_2:\sqrt{3}bx+y=0$，且 $l_1\perp l_2$，则 a^2+b^2 的最小值为（　　）

（A）$\dfrac{1}{4}$　（B）$\dfrac{1}{2}$　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（D）$\dfrac{13}{16}$

答案： A

解析： 要求 a^2+b^2 的最小值，先由 $l_1\perp l_2$ 找 a，b 的关系，

因为 $l_1\perp l_2$，所以 $1\times\sqrt{3}b+(a-1)\times 1=0$，故 $a+\sqrt{3}b=1$，

由此可反解出 a，代入 a^2+b^2 消元，化二次函数求最值，

所以 $a=1-\sqrt{3}b$，代入 a^2+b^2 可得 $a^2+b^2=(1-\sqrt{3}b)^2+b^2=4b^2-2\sqrt{3}b+1=4(b-\dfrac{\sqrt{3}}{4})^2+\dfrac{1}{4}$,

故当 $b=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 时，a^2+b^2 取得最小值 $\dfrac{1}{4}$.

5.（2022・重庆模拟・★★）已知两条直线 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2，倾斜角分别为 α，β，若 $\alpha<\beta$，则下列关系不可能成立的是（　　）

（A）$0<k_1<k_2$　（B）$k_1<k_2<0$　（C）$k_2<k_1<0$　（D）$k_2<0<k_1$

答案： C

解析： 斜率正负与倾斜角钝锐有关，故讨论 α 和 β 的钝锐，

当 α,β 均为锐角时，$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $0<k_1<k_2$；

当 α,β 均为钝角时，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\pi$，所以 $k_1<k_2<0$；

当 α 为锐角，β 为钝角时，$k_2<0<k_1$，故选 C.

6.（2022・江苏扬州模拟・★★）直线 $l: x\sin a+\sqrt{3}y-b=0(a,b\in\mathbf{R})$ 的倾斜角的取值范围是（　　）

（A）$[0,\pi)$　（B）$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}]$　（C）$[0,\dfrac{\pi}{6}]\cup[\dfrac{5\pi}{6},\pi)$　（D）$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$

答案： C

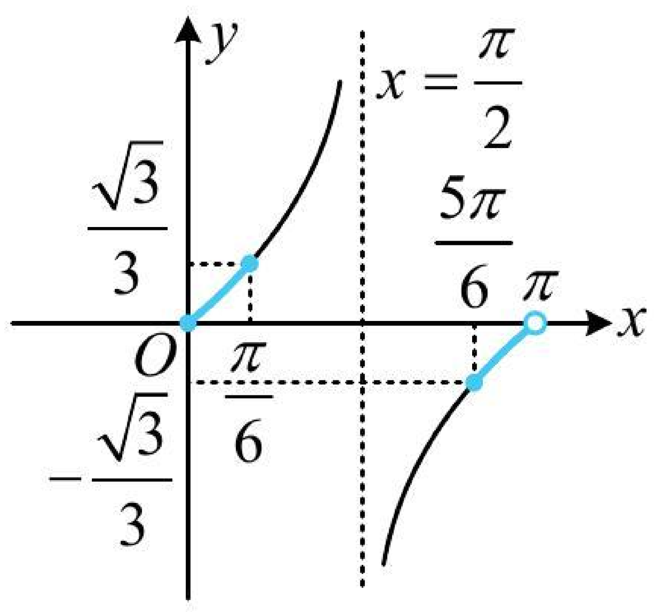
解析： 要求倾斜角的范围，先求斜率的范围，$x\sin\alpha+\sqrt{3}y-b=0(\alpha,b\in\mathbf{R})\Rightarrow y=-\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}x+\dfrac{b}{\sqrt{3}}$,

所以直线 l 的斜率 $k=-\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}$，因为 $-1\le\sin\alpha\le 1$，所以 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le k\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

斜率有正有负，则倾斜角有钝有锐，故分两段考虑，

如图，当 $k\in[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0)$ 时，倾斜角的取值范围是 $[\dfrac{5\pi}{6},\pi)$；当 $k\in[0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$ 时，倾斜角的取值范围是 $[0,\dfrac{\pi}{6}]$；

综上所述，直线 l 的倾斜角的取值范围是 $[0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{5\pi}{6},\pi)$.



7.（★★）已知 $A(-1,1)$，$B(2,2)$，若直线 $l:x+my-1=0$ 与线段 AB 有交点，则实数 m 的取值范围为_____.

答案：$[-\frac{1}{2},2]$

解析：直线 l 的方程含参，先观察是否过定点，由题意，直线 l 过定点 $P(1,0)$，

参数 m 与直线 l 的斜率有关，故可通过分析 l 的斜率的变化范围来求 m 的范围，先考虑斜率不存在的情况，

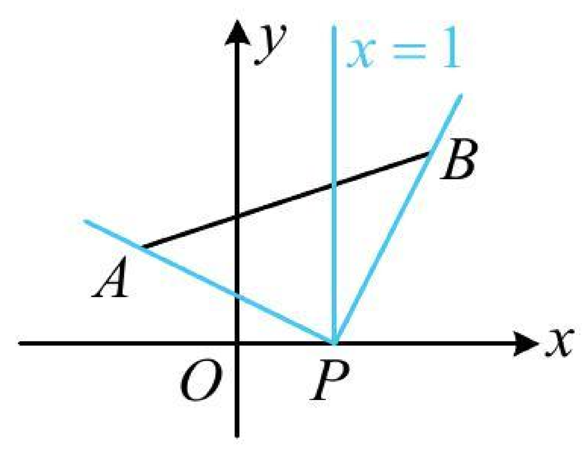
当 $m=0$ 时，直线 l 的方程为 $x=1$，如图，满足题意；

当 $m\neq 0$ 时，直线 l 的斜率 $k=-\frac{1}{m}$，$k_{PA}=-\frac{1}{2}$，$k_{PB}=2$，

直线 l 可从 PB 绕点 P 逆时针旋转至 PA，过程中经过了竖直线，所以其斜率 $-\frac{1}{m}\le -\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{m}\ge 2$，

解得：$0<m\le 2$ 或 $-\frac{1}{2}\le m<0$；

综上所述，实数 m 的取值范围为 $[-\frac{1}{2},2]$.



8.（★★★）已知 $A(-1,0)$，$B(0,3)$，若直线 $l:ax+y+2a-1=0$ 上存在点 P，满足 $|PA|+|PB|=|AB|$，则 l 的倾斜角的取值范围是（　　）

（A）$[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\pi)$　（B）$[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$　（C）$[0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{5\pi}{6},\pi)$　（D）$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$

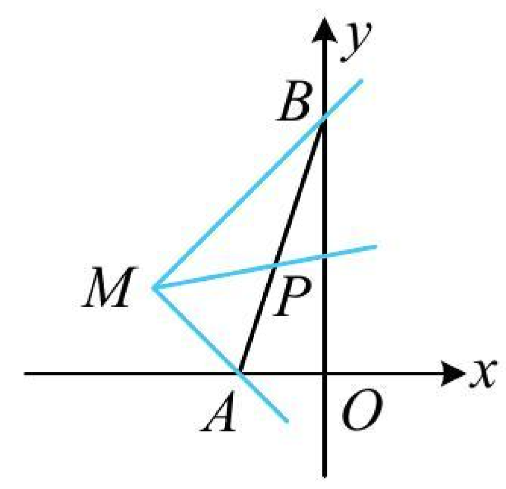
答案：A

解析：$ax+y+2a-1=0\Rightarrow a(x+2)+(y-1)=0$，所以直线 l 过定点 $M(-2,1)$，

满足 $|PA|+|PB|=|AB|$ 的点 P 必在线段 AB 上，故问题等价于直线 l 与线段 AB 有交点，可画图分析，

如图，$k_{MA}=\frac{0-1}{-1-(-2)}=-1$，$k_{MB}=\frac{1-3}{-2-0}=1$，直线 l 从 MA 绕点 M 逆时针旋转至 MB，与线段 AB 有交点，

旋转过程中不经过竖直线，故其斜率的变化范围是 $[-1,1]$，所以其倾斜角的变化范围是 $[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\pi)$.



9.（★★★）（多选）实数 x，y 满足 $x^2+y^2+2x=0$，则下列关于 $\frac{y}{x-1}$ 的判断正确的是（　　）

（A）$\frac{y}{x-1}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$　　（B）$\frac{y}{x-1}$ 的最小值为 $-\sqrt{3}$

（C）$\frac{y}{x-1}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\frac{y}{x-1}$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

答案：CD

解析：出现关于 x，y 的一次分式结构，可考虑运用两点连线的斜率来分析，

因为 $\frac{y}{x-1}=\frac{y-0}{x-1}$，所以 $\frac{y}{x-1}$ 可看成动点 $P(x,y)$ 与定点 $Q(1,0)$ 的连线斜率，

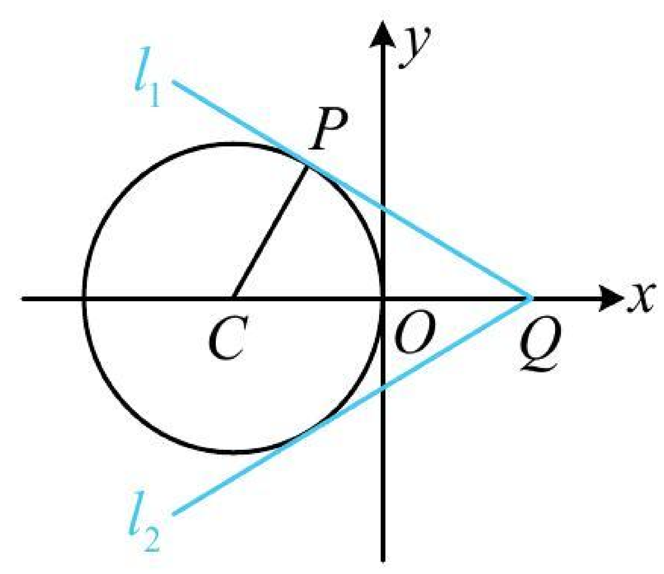
$x^2+y^2+2x=0\Rightarrow(x+1)^2+y^2=1\Rightarrow$ 点 P 可在如图所示的圆上运动，PQ 斜率最小的是 l_1，最大的是 l_2，

观察图形发现 ΔPCQ 的三边易求出，故可求得 $\tan\angle PQC$，进而得到 l_1 的斜率，

由题意，$|PC|=1$，$C(-1,0)$，$|CQ|=2$，

所以 $|PQ|=\sqrt{|CQ|^2-|PC|^2}=\sqrt{3}$，从而 $\tan\angle PQC=\frac{|PC|}{|PQ|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故直线 l_1 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由对称性知直线 l_2 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\frac{y}{x-1}$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



10.（2022 • 河北保定月考 • ★★★）若正三角形的一条高所在直线的斜率为 3，则该正三角形的三边所在直线的斜率之和为_____.

答案：$-\frac{13}{3}$

解析：如图，OD 是正 ΔAOB 的一条高线，其斜率为 3，因为 $AB\perp OD$，所以直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{3}$，

接下来计算 OA 和 OB 的斜率，可抓住它们与 OD 的夹角均为 30°，夹角问题，用方向向量处理，

直线 OD 的方向向量为 $\boldsymbol{m}=(1,3)$，设与直线 OD 夹角为 30° 的直线斜率为 k，则其方向向量为 $\boldsymbol{n}=(1,k)$，

所以 $|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|1+3k|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{1+k^2}}=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得：$k=-2\pm\frac{5}{\sqrt{3}}$，

由图可知 OA 的斜率为正，OB 的斜率为负，所以 $k_{OA}=-2+\frac{5}{\sqrt{3}}$，$k_{OB}=-2-\frac{5}{\sqrt{3}}$，

故该正三角形的三边所在直线的斜率之和为 $-2+\frac{5}{\sqrt{3}}-2-\frac{5}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}=-\frac{13}{3}$.